NOTA BIBLIOGRAFICA

1. Per le *questioni di storia dell'algebra* trattate nell'articolo, vedi:

R. Bombelli, *L'algebra* (1572); prima edizione integrale, Milano, Feltrinelli, 1966, con introduzione di U. Forti e prefazione di E. Bortolotti.

G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, 1847; *An Investigation into the Laws of Thought*, London, 1856.

E. Bortolotti, *La storia della matematica nell'Università di Bologna*, Bologna, Zanichelli, 1947.

F. Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, 1ª ed. 1938, ristampa anastatica 1971, Bologna, Zanichelli.

A. Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1969.

2. *Esposizioni* (relativamente) *elementari* di alcuni concetti fondamentali dell'algebra astratta:

G. Catalano-L. Lombardo Radice, *Minialgebra*, Milano, Feltrinelli, 1972; Enciclopedia Feltrinelli-Fischer (di più autori), voce *Algebra* in *Matematica 1*, Milano, Feltrinelli, 1967.

A. Frajese, *Introduzione elementare alla matematica moderna*, Firenze, Le Monnier, 1968.

F. Speranza, *Relazioni e strutture*, Bologna, Zanichelli, 1970.

3. *Trattati*:

N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Algèbre*, Paris, Hermann, 1959-1964.

C. Chevalley, *I concetti fondamentali dell'algebra*, Milano, Feltrinelli, 1964 (1ª ed. inglese 1956).

R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Paris, Hermann, 1963.

N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, New York-London, van Nostrand, 1951-1964 (3 voll.).

L. Lombardo Radice, *Istituzioni di algebra astratta*, Milano, Feltrinelli, 1965.

S. MacLane-G. Birkhoff, *Algebra*, New York, MacMillan, 1967.

B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, 2 voll., Berlin, Springer, 1930-31.

M. Zamansky, *Introduzione all'algebra e all'analisi moderna*, Milano, Feltrinelli, 1966 (1ª ed. francese 1958).

G. Zappa-R. Permutti, *Gruppi, corpi, equazioni*, Milano, Feltrinelli, 1963.

6.
La topologia e il nuovo modo di concepire la geometria
di Carlo Felice Manara

Entro la matematica moderna un nuovo volto è stato assunto dalla geometria; si potrebbe dire che questa ha profondamente cambiato il suo carattere, al punto che finisce, oggi, con l'apparire quasi un settore particolare di una disciplina assai più vasta, che ne ha ereditato gli intenti. Questa nuova disciplina è la topologia, della quale cercheremo ora di afferrare i concetti meno difficili, confrontandoli con le impostazioni tradizionali della scienza geometrica.

Il termine *topologia* potrà forse suonare un po' nuovo a chi conosce la matematica classica, o crede di conoscerla. Infatti questo nome viene dato a un ramo abbastanza giovane, spuntato in un'epoca relativamente recente dal vecchio tronco della matematica. Occorre tuttavia anche dire subito che la giovinezza a cui si accenna è relativa, perché si possono far risalire le origini di questa dottrina agli ultimi decenni del secolo scorso, e forse anche a un'epoca precedente. Oggi questa branca della matematica sta acquistando un'importanza sempre maggiore: è anzi diventata uno dei pilastri fondamentali di tutta la matematica modernamente intesa.

In un certo senso, si può dire che la topologia presenta due filoni principali, i quali traggono la loro origine da certi problemi e da certe ricerche che formano ormai un repertorio classico della matematica.

Il primo di questi filoni, chiamato anche suggestivamente « geometria qualitativa », viene fatto risalire alle ricerche del grande matematico svizzero del secolo XVIII Leonardo Euler (il cui nome è spesso presentato nella forma latinizzante di Eulero) e alle ricerche del famoso matematico francese Henri Poincaré. Si fa risalire l'origine del secondo filone della topologia alle ricerche del grande matematico tedesco Georg Cantor, il quale viene considerato il fondatore della moderna teoria degli insiemi e al quale si devono progressi fondamentali dell'analisi matematica nel secolo scorso. Per spiegarci meglio, e per dare al lettore un aiuto a farsi un'idea più precisa dell'argomento, riteniamo utile presentare qualche esempio dei problemi e delle questioni che riguardano i due filoni di ricerca dei quali abbiamo parlato.

Con riferimento al primo filone, si suole ricordare il famoso problema che viene detto « dei ponti di Königsberg » e che Eulero trasformò in un problema di teoria dei grafi, dimostrando poi che la sua soluzione era impossibile. Per dare brevemente una idea approssimativa di ciò che diciamo, occorre specificare che si chiama *grafo* una figura formata da un certo numero di punti e da certi archi di linea che uniscono i punti tra loro. In relazione ad un grafo si può formulare un problema, che viene frequentemente posto dalle riviste di enigmistica ai loro lettori; a questi viene richiesto di tracciare una certa figura (per l'appunto un grafo) con la matita senza mai staccare la punta dal foglio e senza mai ripassare due volte sullo stesso tratto. Si pensi per es. ad una circonferenza e ad un suo diametro; questa figura si può tracciare con un solo tratto di matita, senza mai staccare la matita dal foglio e senza passare due volte su un tratto già tracciato; basta partire da uno degli estremi del diametro. Ma la stessa cosa non si può ottenere per la figura formata per esempio dalla circonferenza e da due suoi diametri (ovviamente diversi tra loro). Osserviamo subito che il fatto che la figura sia formata da una circonferenza e da un suo diametro è assolutamente inessenziale ai fini del problema che ci interessa. Potremmo, per esempio, pensare ad un quadrato ed a una sua diagonale. La cosa importante per la risposta è che nella figura si presentano due punti i quali vengono congiunti da tre tratti di linea che non si intersecano. Tali punti, nel caso della circonferenza, sono gli estremi del diametro; nel caso del quadrato, sono i vertici opposti, congiunti dalla diagonale. Pensiamo ora alla figura della circonferenza e del suo diametro come se fosse tracciata, invece che su un foglio di carta, su un foglio di materiale deformabile, per es. su un foglio di gomma. Tutti intuiscono che la figura stessa potrebbe essere deformata con continuità, per esempio stiracchiando o piegando il foglio di gomma. Naturalmente, dopo la deformazione, la circonferenza non è più tale e il diametro non è più rettilineo. Ma la proprietà della figura, di poter essere tracciata con un solo tratto e con le modalità accennate, rimane sempre la stessa.

Orbene, se teniamo presente questo esempio possiamo avere una idea della ragione che ha condotto a dare il nome di *geometria qualitativa* a questo ramo della topologia. Usando un linguaggio abbastanza suggestivo, anche se poco preciso, potremmo dire che stiracchiando il foglio di gomma abbiamo alterato diversi caratteri quantitativi della figura: abbiamo alterato gli angoli tra le linee; ma con la stessa operazione non abbiamo cambiato certe *qualità della figura.* Con linguaggio più tecnico si potrebbe dire che, anche dopo la deformazione, ci sono delle proprietà della figura che non sono cambiate, sono — come suol dirsi — *invarianti* rispetto alle operazioni che abbiamo eseguite.

Facciamo un altro esempio: immaginiamo due pezzi di spago, per esempio lunghi un metro ciascuno, e annodiamoli, in modo da formare con ciascuno una curva chiusa. È chiaro che, quando abbiamo annodato il primo dei due pezzi, ci rimangono due scelte per annodare il secondo: possiamo infatti annodarlo in modo che formi un anello concatenato con il primo oppure no. Nel primo caso, è impossibile separare i due anelli di spago, comunque essi vengono deformati, senza lacerare o sciogliere nessuno dei due anelli; nel secondo caso i due anelli possono essere separati tra loro e portati anche distanti l'uno dall'altro. Abbiamo anche qui una figura, quella formata dai due anelli di spago, che ha una certa *qualità,* la quale viene espressa dicendo che i due anelli sono oppure non sono concatenati tra loro. Questa qualità è chiaramente indipendente dalle circostanze quantitative: per esempio è indipendente dalla lunghezza dei due pezzi di spago che abbiamo preso, oppure dalla forma che diamo a ciascuno di essi.

Consideriamo un altro esempio, che prendiamo da quel capitolo della geometria solida che riguarda i poliedri, cioè figure solide limitate da facce piane. Pensiamo ad un cubo (per esempio a un dado da gioco) e ad un mattone. Sono due solidi ben diversi tra loro, ma tuttavia si constata immediatamente che hanno lo stesso numero di facce (6), di spigoli (12), di vertici (8). La cosa si può verificare contando gli elementi dell'uno e dell'altro solido, oppure si può constatare pensando che il dado può essere *gonfiato* fino a ottenere il mattone, o viceversa il mattone può essere rimpicciolito fino ad ottenere il dado. La operazione di *gonfiamento* infine si può pensare eseguita in modo che, mentre essa avviene, il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce del solido non cambi. Orbene, tra i numeri degli elementi, facce, vertici e spigoli, dei due solidi che abbiamo considerato sussiste una relazione che è valida pure per qualunque altro poliedro convesso, tale cioè che il piano di una faccia lasci tutto il resto del solido dalla stessa parte. La relazione venne dimostrata da Eulero e dice che il numero degli spigoli, aumentato di due, è uguale alla somma del numero delle facce e di quello dei vertici.

Chiunque può fare la verifica, per esempio, sui famosi cinque poliedri regolari che Platone enumera: tetraedro, cubo, ottaedro, pentagono-dodecaedro, icosaedro. Ma la cosa più interessante è che la proprietà resta valida anche per figure che non sono poliedri, cioè non sono necessariamente limitate da facce piane. Per fare un esempio, pensiamo ad un pallone per il gioco del calcio, di quelli che sono ottenuti cucendo insieme dei pezzi di cuoio bianchi e dei pezzi di cuoio neri. Gonfiando poi con aria, si ottiene una figura che, con buona approssimazione, possiamo considerare come sferica. Ora possiamo pensare che i pezzi di cuoio cuciti insieme ci diano quello che si chiama un *reticolato* sulla superficie sferica. Possiamo chiamare *facce* del reticolato i pezzi di cuoio che sono stati cuciti insieme; possiamo chiamare *spigoli* del reticolato le cuciture che saldano due diversi pezzi di cuoio; possiamo chiamare *vertici* del reticolato i punti in cui confluiscono almeno tre cuciture diverse. Orbene, si può dimostrare che la relazione di Eulero vale anche per questo reticolato sulla sfera. In altre parole, per la validità della relazione non è affatto necessario che si prenda in considerazione un poliedro, cioè un solido limitato da facce piane. Essa è valida anche per un qualunque solido che si possa pensare ottenuto dalla sfera per deformazione, così come il pallone da calcio è stato ottenuto gonfiando una certa superficie ottenuta cucendo insieme dei pezzi di cuoio. Siamo quindi in presenza di una proprietà della superficie sferica e di ogni altra superficie che possa essere deformata con continuità fino ad essere portata alla forma sferica. La proprietà viene enunciata dicendo che esiste un numero intero che è un *invariante* della superficie sferica e di ogni altra superficie che può essere deformata con continuità nella superficie sferica. Henri

Poincaré estese la validità di questa proposizione anche a figure di spazi a *n* dimensioni, dimostrando l'esistenza di un invariante numerico che oggi viene chiamato *caratteristica di Eulero-Poincaré.*

Proseguiamo nella esemplificazione, per dare una idea dei campi apparentemente differenti ai quali si possono applicare dei procedimenti che sono di competenza della topologia. I nostri lettori conoscono forse il romanzo di Honoré de Balzac intitolato *La pelle di zigrino.* In esso si narra di una magica pelle di zigrino, che si restringeva di un poco ogni volta che il suo possessore formulava un desiderio. Ogni desiderio del possessore della pelle era magicamente esaudito, ma egli sapeva pure che alla fine dell'operazione di contrazione della pelle c'era la sua morte. Pensiamo dunque a una figura convessa, per esempio una circonferenza, oppure a una figura ovoidale qualunque, e pensiamo di eseguire una *contrazione* della figura in se stessa, così come avveniva della pelle di zigrino del romanzo di Balzac, quando il suo possessore esprimeva un desiderio. Si può prevedere che, con questo cambiamento, ogni punto della figura verrà a spostarsi, magari prendendo una posizione che sia (detto in forma molto approssimata) più *all'interno* rispetto alla posizione di partenza. Orbene, un celebre teorema di Brouwer afferma che nell'interno della figura che viene così contratta vi è almeno un punto che non si muove. Per tale ragione il teorema viene anche chiamato *teorema del punto fisso.* Questo teorema di topologia, dimostrato anzitutto per le due dimensioni, è stato esteso anche a trasformazioni di figure a più dimensioni e oggi viene utilizzato in campi svariatissimi, per dimostrare l'esistenza di soluzioni di certi problemi matematici.

Veniamo ora ad un ultimo esempio di proprietà che sono di competenza della topologia e che vogliamo presentare ai lettori nella prima parte di questa esposizione: pensiamo all'atmosfera che circonda la Terra e al vento che muove l'aria di questa atmosfera; in ogni punto della superficie terrestre la direzione e la velocità del vento potrebbero essere rappresentate da una frecciolina (ciò che nel linguaggio della matematica viene designato come *vettore tangente*). Accettiamo l'ipotesi che a punti vicini tra loro sulla superficie della Terra debbano corrispondere delle freccioline poco differenti tra loro. Questa ipotesi potrebbe venire enunciata in linguaggio matematico dicendo che il vettore che rappresenta il vento sulla superficie terrestre in un punto è funzione continua del punto stesso. Orbene, si dimostra che, accettata questa ipotesi, non è possibile che ci sia vento in ogni punto della Terra; in altre parole, deve esistere almeno un punto sulla Terra nel quale il vettore che rappresenta il vento localmente è il vettore zero. Questa proprietà viene enunciata nel linguaggio della matematica dicendo che *il fibrato tangente della sfera non ammette sezioni globali.* Anche a proposito di questa proprietà, si può osservare, a livello dell'intuizione, che essa non cambierebbe se si deformasse pochissimo la sfera, facendola diventare per esempio un ellissoide press'a poco della forma di un pallone da rugby, e mantenendo ai vettori tangenti la proprietà di essere funzioni continue del punto, cioè di differire di poco quando i punti nei quali essi sono tangenti sono vicini tra loro.

Abbiamo finora esposto qualche esempio di certe proprietà che sono di competenza della topologia, e precisamente di quello tra i suoi rami che le ha giustificato il nome di *geometria qualitativa*; abbiamo anche cercato di giustificare in parte questo nome, osservando che le proprietà enumerate non dipendono dalle distanze e dagli angoli delle figure che si considerano. Vogliamo ora occuparci brevemente del secondo filone di ricerche matematiche, dal quale trae la sua origine una seconda branca molto importante della topologia. Si potrebbe dire che tale filone nasce dalle ricerche di analisi matematica del secolo scorso.

Come abbiamo già detto, a Georg Cantor si deve in modo particolare la fondazione della teoria degli insiemi, oggi considerata come uno dei pilastri fondamentali della matematica e della logica. A lui si deve pure una delle formulazioni della proprietà fondamentale di *continuità* della retta geometrica o dell'insieme dei numeri reali. Ricordiamo che in precedenza abbiamo più volte parlato di *continuità*, di *vicinanza* di punti, ed abbiamo usato espressioni analoghe, prese dal linguaggio comune e che per questo linguaggio hanno, o sembrano avere, un significato ben preciso. Cerchiamo ora di analizzare brevemente a che cosa alludiamo quando parliamo della *continuità della retta.* È questa una proprietà che venne considerata come del tutto intuitiva dai matematici, almeno fino alla prima metà dello scorso secolo. È facile prevedere che anche il profano di matematica considererà intuitivo il fatto che, dati su una retta due punti, e immaginando un punto che si muove dall'uno all'altro, il punto mobile viene a coincidere con ogni punto che sta tra quello di partenza e quello di arrivo.

Vediamo un altro esempio; supponiamo che sia data in un piano una circonferenza ed immaginiamo due punti, l'uno interno e l'altro esterno alla circonferenza stessa. Immaginiamo ora di mettere la punta di una matita sul primo dei due punti (per esempio quello interno) e di tracciare una linea che congiunge il punto interno alla circonferenza con il punto esterno. Ben pochi penseranno di mettere in dubbio il fatto che la linea *deve* incontrare la circonferenza nel passare da un punto interno ad un punto esterno.

Queste due proposizioni, che vengono considerate come evidenti se ci rivolgiamo all'esperienza che noi abbiamo della realtà fisica, dànno però luogo a varie difficoltà se vogliamo esprimerle e descriverle in termini assolutamente rigorosi. La matematica non accetta dei ragionamenti che siano basati su considerazioni del tipo di quelle che vengono espresse da frasi come *si vede* oppure *è evidente che* o altre analoghe. Il rigore matematico vuole che tutte le proposizioni non dimostrate vengano enunciate all'inizio di una teoria espressamente come tali, senza ricorso all'esperienza fisica, e che nella dimostrazione si faccia appello esplicitamente a quelle proposizioni ed a quelle sole.

Considerazioni analoghe potrebbero essere fatte a proposito delle espressioni che abbiamo usato varie volte in precedenza, del tipo delle seguenti: *deformare con continuità* oppure *cambiare con continuità* una figura. Tutto ciò abbiamo detto facendo appello all'intuizione, la quale ci fornisce il concetto grezzo di *funzione continua.*

Se si volesse descrivere con parole le proprietà di una funzione cosiffatta, si potrebbe dire che essa traduce il detto classico secondo il quale *natura non facit saltus.*

Anche questa intuizione si può rilevare fallace, o comunque potrebbe essere soggetta a molte revisioni e critiche; tuttavia appare abbastanza accettabile quando si cerchi di fondarla su certe esperienze comuni, che noi utilizziamo quotidianamente nel nostro ragionamento e nel nostro comportamento, senza farci molto caso. Per esempio, abbiamo l'abitudine di pensare alla temperatura sulla superficie della Terra come ad una funzione continua del punto in cui la consideriamo: ciò significa soltanto che in punti abbastanza vicini tra loro della superficie terrestre ci attendiamo di trovare dei valori della temperatura abbastanza vicini. Ma quando si voglia precisare in senso rigoroso questo concetto abbastanza evidente (o che ci appare tale) si incontrano gravi difficoltà logiche. Infatti, la matematica non può accontentarsi di indicazioni qualitative, come quelle che si dànno dicendo che *due punti sono vicini tra loro* oppure che *due valori sono vicini tra loro o differiscono di poco*, oppure infine che *due valori si avvicinano indefinitamente.* Tale concetto di *avvicinamento indefinito* può avere infatti un senso soltanto quando si sia precisato che cosa si intende per *distanza* tra due punti oppure due oggetti.

Orbene, la topologia ha spinto la sua analisi molto avanti sui fondamenti di questo concetto di *distanza*, dando del concetto stesso una definizione che è contemporaneamente più rigorosa e più generale di quella che viene abitualmente data. Si osserva infatti che la distanza tra due punti, che viene definita in geometria elementare, ha queste proprietà sostanziali: anzitutto è un numero non negativo, il quale si annulla se, e soltanto se, i due punti coincidono; in secondo luogo la distanza di due punti non dipende dall'ordine in cui i punti stessi vengono considerati (in linguaggio tecnico si suol dire che la distanza di due punti è una *funzione simmetrica della coppia*); infine si ha che, considerati tre punti qualsivogliano, tra le loro distanze prese a due a due sussiste una relazione la quale viene anche chiamata *diseguaglianza triangolare*; tale relazione infatti, nello spazio euclideo abituale, traduce il fatto che la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due.

Si constata che vi sono moltissimi insiemi, tali che è possibile definire per tutte le coppie (a, b) dei loro elementi una funzione d avente le caratteristiche sopra ricordate, che viene quindi chiamata *distanza* e che è caratterizzabile con queste condizioni formali:

1) $d(a, b) = 0$ se, e solo se $a = b$
2) $d(a, b) = d(b, a)$
3) $d(a, b) + d(a, c) \geqq d(b, c)$.

Gli elementi dell'insieme vengono chiamati convenzionalmente *punti*, anche se la denominazione non ha alcuna giustificazione intuitiva che la ricolleghi alle nozioni della geometria elementare. Tali « punti » possono essere, per esempio, funzioni definite su uno spazio euclideo, oppure insiemi di merci o beni di consumo offerti a un consumatore sul mercato.

Osserviamo che la scelta di una funzione delle coppie di « punti » di uno spazio, la quale possa svolgere le veci di distanza, e pertanto soddisfi alle condizioni che abbiamo enumerato poco fa, può essere fatta in diversi modi. In altre parole, si potrebbe dire che l'introduzione di una distanza tra due elementi di un insieme, quando è possibile, risulta essere in una certa misura arbitraria e convenzionale.

Un insieme sul quale sia stata definita una funzione di distanza viene abitualmente chiamato *spazio metrico* e i suoi elementi, come abbiamo già detto, vengono chiamati « punti », anche se questa denominazione non è giustificata da un'esperienza concreta di carattere geometrico. Si ottiene così lo scopo di generalizzare di molto i risultati dell'analisi matematica classica. Molti di questi risultati si possono far rientrare, come casi particolari, nei risultati generalissimi conseguiti dalla topologia, quando gli spazi astratti che vengono presi in considerazione si riducono ad essere lo spazio euclideo abituale o qualche suo sottospazio. Ma l'indagine è stata spinta ancora più avanti, e sono stati studiati degli insiemi che non sono spazi metrici, ma sui quali si può ancora definire una topologia. Questa definizione viene data fissando, in un insieme a priori qualunque, una famiglia di suoi sottoinsiemi, dotata di certe qualità in modo da costituire quella che si chiama *copertura* dell'insieme considerato. A questo livello di astrazione e di generalità, i procedimenti che vengono utilizzati sono più di competenza della logica pura che della matematica. Resta tuttavia il fatto che i risultati che si ottengono hanno una estrema generalità e conducono a stabilire delle proposizioni che sono di grandissima importanza per tutta la matematica.

È chiaro che non possiamo dire di più, perché il proseguire porterebbe alla necessità di usare simboli matematici e di applicare in particolare le notazioni e i concetti della teoria degli insiemi, al di là di quanto pare opportuno fare in questa sede. Crediamo tuttavia che bastino i pochi cenni che abbiamo dato fin qui per far comprendere che la topologia rappresenta in un certo senso un nuovo modo per concepire la geometria. Uno degli aspetti della geometria, infatti, potrebbe essere descritto dicendo che questa scienza porta a un'analisi razionale delle nostre esperienze elementari riguardanti i corpi o i fenomeni fisici in quanto estesi, cioè collocati nello spazio e legati da certe relazioni di posizioni e di grandezza. Quando si fa della geometria nel senso classico del termine, si analizzano queste relazioni per mezzo di operazioni numerose e svariate: per esempio, per definire le distanze e gli angoli ci si vale della idealizzazione dell'esperienza del trasporto di un corpo rigido. Ma l'analisi che la topologia ha fatto delle relazioni spaziali mostra che la vicinanza e la lontananza possono essere ricondotte ad operazioni ancora più elementari. Esse possono essere investigate con strumenti logici (per così dire) al fondo delle cose: gli strumenti della teoria degli insiemi, che ci forniscono l'analisi delle relazioni logiche più fondamentali delle operazioni più elementari della nostra mente.

Prima di avviarci alla conclusione, vogliamo fare un'ultima osservazione, e precisamente vorremmo ricordare che la topologia, così come viene intesa oggi, potrebbe apparire a qualcuno come molto astratta e, per questa ragione, inutile alla matematica che si vuole applicare alle altre scienze o alla pratica.

Una simile idea potrebbe venire a chi prenda in considerazione un teorema di quelli che in matematica si chiamano *teoremi di esistenza* e che affermano l'esistenza di certi enti (numeri, punti ecc.) senza dare ulteriori informazioni. Tale per esempio è il teorema del punto fisso, di cui abbiamo parlato, il quale afferma che nella *contrazione* di una figura in se stessa vi è almeno un punto che sta fermo. Un'analisi superficiale potrebbe portare alla conclusione che questa informazione è quanto mai inutile, perché — posto che la cosa ci interessi — non ci viene detto dove si trovi questo punto che ha la proprietà indicata. Tuttavia la conclusione sarebbe affrettata, perché si può facilmente far vedere che questo teorema ha un grandissimo numero di applicazioni pratiche. Ciò si avvera anche per moltissimi altri risultati di matematica i quali, proprio in funzione della loro grande astrattezza, vengono ad avere una grandissima generalità e quindi un'enorme fecondità di applicazioni. Questi caratteri hanno fatto della topologia uno dei capitoli più importanti della matematica di oggi, addirittura una colonna portante di questo immenso ed armonico edificio.

Ora occorre ricordare che la matematica è in certo senso una delle scienze fondamentali del patrimonio di conoscenza e di tecnica dell'uomo di oggi. È certo infatti che senza la matematica non esisterebbero le scienze moderne ed è altrettanto certo che non si può distinguere tra la matematica *che serve* (secondo il giudizio di alcuni) e la matematica inutile, destinata ad essere coltivata soltanto da pochi iniziati per una sorta di divertimento personale, come una specie di mania, inoffensiva sì, ma inservibile al resto dell'umanità; sta di fatto invece che la matematica *che serve* trae la linfa di cui si nutre da quella, astrattissima, che appare *inutile* e troppo separata dalla realtà. Tutto questo continuo e fecondo processo di scambio di idee e di risultati è una delle condizioni necessarie perché il pensiero scientifico moderno possa progredire. E in questo progresso uno dei posti principali è tenuto oggi dalla topologia, una delle neonate branche della scienza matematica, ma non per questo tra le meno robuste e vitali.

(Trasmesso il 21 aprile 1972).

NOTA BIBLIOGRAFICA

P. ALEKSANDROV, *Topologia combinatoria*, trad. di Lucio Lombardo Radice, Torino, Einaudi, 1957.

AA. VV., *Strutture algebriche e strutture topologiche*, Milano, Feltrinelli, 1963.

F. CONFORTO & M. BENEDICTY, *Introduzione alla topologia*, Roma, Cremonese, 1960.

V. CHECCUCCI, A. TOGNOLI, E. VESENTINI, *Lezioni di topologia generale*, Milano, Feltrinelli, 1968.

E. PATTERSON, *Topologia*, Roma, Cremonese, 1966.